P.Aimé. 28/07/07

Calcul différentiel/Différentielles/Rang et différentiabilité demo9.pdf

Outil préliminaire. **Théorème du point fixe**.

$\mathbb{R}^n$ est muni d'une distance d dont la topologie associée est la topologie usuelle.

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application k-contractante, autrement-dit il existe un réel $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad d(g(x), g(y)) \leq k\ d(x,y).$$

Alors, g possède un point fixe unique a, et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $a = \lim_{n\to\infty} g^n(x)$.

De plus, on peut remplacer $\mathbb{R}^n$ par n'importe quelle partie fermée non vide de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

On définit une suite (x_n) dans $\mathbb{R}^n$ à partir d'un point quelconque $x_0 = x$, et $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n \geq 0$.

Alors,

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) = d\left(g\left(x_{n-1}\right), g\left(x_n\right)\right) \leq k\ d\left(x_{n-1}, x_n\right).$$

Il en résulte que

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq k^n\ d(x_0, x_1),$$

et donc

$$\begin{aligned} d\left(x_n, x_{n+p}\right) &\leq d\left(x_n, x_{n+1}\right) + .. + d\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}\right) \\ &\leq \left(k^n + ... + k^{n+p-1}\right)\ d(x_0, x_1) \\ &= k^n\ \frac{1-k^p}{1-k}\ d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k}\ d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

La suite (x_n) est de Cauchy, donc convergente, et sa limite a est un point fixe de g compte tenu de la continuité de g. ∎

Théorème d'inversion locale

Soit f une application de classe C^1, définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et a un point de U tel que l'application linéaire $d_a f$ soit inversible.

Alors, il existe un voisinage ouvert W de a, inclus dans U, et un voisinage ouvert V de $b = f(a)$, tels que la restriction de f à W soit un C^1-difféomorphisme de W sur V.

On dit alors que f est un **difféomorphisme local**.

Démonstration

Etape 1

Il est suffisant de démontrer le théorème dans le cas où $a = b = 0$, et $d_0 f = Id$.

En effet, si la composée (à gauche par exemple) de f avec la bijection linéaire $(d_a f)^{-1} \circ f$ et la composée de cette application à droite et à gauche avec des translations, est un difféomorphisme local, alors f est un difféomorphisme local.

Etape 2

Envisageons la famille des applications $g_y : x \longmapsto y + x - f(x)$, définies et C^1 sur U, et paramétrée par $y \in \mathbb{R}^n$.

Remarquons que $g_0(0) = 0$.

Dans cette étape, on envisage de démontrer que pour tout y appartenant à un voisinage convenable de 0, l'application g_y admet un point fixe unique, c'est à dire que y admet un antécédent unique par f.

Pour cela,

a) Prouvons que la norme de l'application linéaire $d_x(g_y)$ est majorée par une constante plus petite que 1, uniformément en y, pourvu que x appartienne à un voisinage convenable de 0.

On a en effet $d_x(g_y) = d_x(g_0) = Id - d_x f$, donc $d_0(g_y) = 0$. Par continuité de $d(g_y)$, il existe une boule fermée A de centre 0, de rayon α, contenue dans U, telle que $N(d_x(g_y)) \leq \frac{1}{2}$ pour $x \in A$, indépendemment de y (l'intérêt de supposer A fermé apparaîtra ci-dessous pour l'application du théorème du point fixe). N désigne la norme dans $L(\mathbb{R}^n)$ subordonnée à la norme choisie dans $\mathbb{R}^n$.

b) Prouvons maintenant que g_y stabilise A, pourvu que y reste dans un voisinage convenable B de 0.

Cela vient des majorations suivantes (la deuxième est le théorème des accroissements finis, voir l'article 334 consacré à ce théorème).

$$\begin{aligned} \|g_y(x)\| &\leq \|y\| + \|g_0(x)\| \\ &\leq \|y\| + \frac{1}{2}\|x\|. \end{aligned}$$

Il apparaît que si y appartient à la boule fermée B de centre 0, de rayon $\frac{\alpha}{2}$, alors $g_y(A) \subset A$.

c) Dans ces conditions, g_y est $\frac{1}{2}$-contractante sur A, donc possède un point fixe (unique), ce qui prouve que, pour tout $y \in B$, il existe un point unique $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Sans changer la notation, remplaçons A par le fermé $f^{-1}(B)$, on a obtenu un voisinage fermé A de 0, et un voisinage fermé B de 0, tels que la restriction de f à A soit une bijection de A sur B.

Etape 3

Démontrons que la bijection $f\,|_A\colon A \to B$ est un homéomorphisme, c'est à dire la continuité de la réciproque.

En écrivant $x = x - f(x) + f(x)$ pour tout $x \in A$, il vient

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &\leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \|g_0(x_1) - g_0(x_2)\| \\ &\leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

et par suite

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2 \|f(x_1) - f(x_2)\|,$$

ce qui assure le résultat.

Etape 4

Démontrons que f^{-1} est différentiable au point 0.

L'hypothèse de différentiabilité de f à l'origine permet d'écrire, pour $x \in A$,

$$f(x) = d_0 f(x) + \|x\| \varepsilon(x) = x + \|x\| \varepsilon(x)$$

Ceci s'écrit aussi, pour $y \in B$,

$$f^{-1}(y) = y - \left\|f^{-1}(y)\right\| \varepsilon(f^{-1}(y)),$$

et, compte-tenu de la majoration obtenue à l'étape précédente,

$$\left\|f^{-1}(y) - y\right\| \leq 2 \|y\| \left\|\varepsilon(f^{-1}(y))\right\|,$$

ce qui prouve que f^{-1} est différentiable à l'origine, avec $d_0\left(f^{-1}\right) = Id$ (il n'y a pas d'autre possibilité puisque $d_0(f) = Id$), sachant que f^{-1} est continue.

Etape 5

Démontrons que f^{-1} est de classe C^1 au voisinage de 0.

f étant de classe C^1 sur U, et $d_0 f$ étant inversible, il existe un voisinage ouvert Ω de 0 en tout point duquel $d_x f$ est inversible (en effet, $\det(d_x f)$ est une composition de deux applications continues).

Tout ce qui précède peut-être appliqué en remplaçant le point $a = 0$ par un point quelconque $x \in \Omega$.

Pour chaque x, f se restreint en un homéomorphisme d'un voisinage de x sur un voisinage de $y = f(x)$, dont la réciproque est différentiable en y.

Il reste à prouver la continuité de l'application $y \longmapsto d_y\left(f^{-1}\right)$. Pour cela, on décompose cette application en produit des trois applications continues :

$$y \longmapsto x \longmapsto d_x f \longmapsto d_y\left(f^{-1}\right) = \left(d_x f\right)^{-1}.$$

Ceci achève la démonstration. ∎

Corollaire (**Théorème d'inversion globale**).

Si f est une application injective et de classe C^1, définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, si de plus la différentielle $d_a f$ en chaque point $a \in U$ est une bijection linéaire, alors $f(U)$ est ouvert et f est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

C'est une conséquence évidente du théorème d'inversion globale.

Théorème du rang

Soit f une application C^1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, avec $(n,p) \in]p]^2$.

*On suppose que f est de **rang constant** k.*

Alors, pour tout point $a \in Dom\, f$, il existe

- un C^1-difféomorphisme Φ, défini sur un voisinage ouvert de a, noté $Dom\, \Phi$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$,

- un C^1-difféomorphisme Ψ, défini sur un voisinage ouvert de $b = f(a)$, noté $Dom\, \Psi$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$,

tels que

$\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ soit la restriction à $\mathrm{Im}\, \Phi$ de l'application linéaire $(y_1, ..., y_n) \longmapsto (y_1, ..., y_k, 0, .., 0)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Démonstration

Etape 0 (Lemme)

Si f est une application C^1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, l'ensemble des points de $Dom\, f$ où le rang est maximum est un ouvert.

En effet, si f est de rang $r = \inf(n,p)$ en un point $a \in Dom\, f$, la matrice jacobienne de f en a admet un mineur non nul d'ordre r. Par continuité de l'application $x \longmapsto \det(J_x f)$, ce mineur est non nul lorsque x appartient à un voisinage ouvert convenable V de a, ce qui prouve que le rang de f aux points x appartenant à V est au moins égal à r, donc égal à r.

Etape 1

En composant à droite f avec la translation de vecteur a, et à gauche avec la translation de vecteur $-b$, on est ramené au cas $a = 0$, $b = 0$.

En composant à droite et à gauche avec des isomorphismes convenables de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbb{R}^p$, correspondant à des changements de bases, on peut supposer que

$$\Delta_x = \det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} (x) \right)_{(i,j) \in]k]^2}$$

est non nul en tout point x appartenant à un voisinage ouvert de 0. La conclusion étant locale, on supposera que ce voisinage coincide avec $Dom\, f$.

Etape 2

Notons φ la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, définie sur $Dom\, f$ par

$$\varphi(x) = \left(f^1(x), ..., f^k(x), x^{k+1}, ..., x^n \right)$$

La matrice jacobienne de φ en $x \in Dom\, f$ est

$$\begin{pmatrix} \Delta_x & * \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

et par suite φ se restreint en un difféomorphisme Φ d'un voisinage ouvert $Dom\, \Phi$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$, sur un voisinage ouvert $\mathrm{Im}\, \Phi$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$.

Etape 3

Exprimons l'application $f \circ \Phi^{-1}$.

Compte tenu de la définition de Φ, on a

$$\begin{array}{ll} & \left(f \circ \Phi^{-1}\right)(y) \\ = & \left(y^1, ..., y^k, \left(f^{k+1} \circ \Phi^{-1}\right)(y), ..., \left(f^n \circ \Phi^{-1}\right)(y)\right) \end{array}$$

De plus, la matrice jacobienne de $\left(f \circ \Phi^{-1}\right)$ en $y \in \text{Im } \Phi$ est

$$\left(\begin{array}{cc} I_k & 0 \\ * & \left(\frac{\partial\left(f^i \circ \Phi^{-1}\right)}{\partial y^j}\right) \end{array}\right)_{(i,j)\in\{K+1,..,p\}^2}$$

L'application $\left(f \circ \Phi^{-1}\right)$ étant de rang k sur Im Φ, il est nécessaire que les fonctions $f^i \circ \Phi^{-1}$ ne dépendent que de $y^1, ..., y^k$, pour $i = k+1$ à p.

Il est commode d'écrire

$$\begin{array}{ll} & \left(f \circ \Phi^{-1}\right)(y) \\ = & \left(\begin{array}{c} y^1, ..., y^k, \left(f^{k+1} \circ \Phi^{-1}\right)\left(y^1, ..., y^k\right), \\ ..., \left(f^p \circ \Phi^{-1}\right)\left(y^1, ..., y^k\right) \end{array}\right) \end{array}$$

après identification de $\mathbb{R}^n$à $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{p-k}$, $\left(y^1, ..., y^k\right)$ appartenant à l'ouvert Ω intersection de Im Φ avec $\mathbb{R}^k$.

Etape 4

Notons ψla fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^{p-k}$ par

$$\psi(z) = \left(\begin{array}{c} z^1, ..., z^k, z^{k+1} + \left(f^{k+1} \circ \Phi^{-1}\right)\left(z^1, ..., z^k\right), \\ ..., z^p + \left(f^p \circ \Phi^{-1}\right)\left(z^1, ..., z^k\right) \end{array}\right)$$

La matrice jacobienne de ψ étant

$$\left(\begin{array}{cc} I_k & 0 \\ * & I_{p-k} \end{array}\right)$$

l'application ψ est un difféomorphisme local. On notera Ψ la réciproque, restreinte à un voisinage ouvert de 0 contenu dans Im f.

Etape 5

On exprime maintenant $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ sur Ω.

Si $z = \left(\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}\right)(y)$, il résulte des expressions de $\Psi^{-1}(z) = \psi(z)$ et de $\left(f \circ \Phi^{-1}\right)(y)$ que $z^1 = y^1, ..., z^k = y^k$, $z^{k+1} = ... = z^p = 0$, ce qu'il fallait prouver. ■

Corollaire 1

Soit f une application C^1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, avec $n \geq p$, et $a \in Dom\, f$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) L'application linéaire $d_a f$ est surjective (on dit que f est *une* ***submersion*** *en a).*

(2) Il existe un difféomorphisme local Φ de $\mathbb{R}^n$, défini au voisinage de a, tel que $f \circ \Phi^{-1}$ soit la restriction à un voisinage de $\Phi(a)$ de la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}^p$.

(3) f est localement inversible à droite en a.

Démonstration

De (1) à (2), la propriété est un cas particulier du théorème du rang.

De (2) à (3), il suffit de considérer une application linéaire s inverse à droite de π, pour avoir localement $f \circ \left(\Phi^{-1} \circ s\right) = I$.

De (3) à (1), il suffit de différentier la fonction composée. ■

Corollaire 2

Soit f une application C^1 définie sur un ouivert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, avec $p \geq n$, et $a \in Dom\, f$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) L'application linéaire $d_a f$ est injective (on dit que f est *une* ***immersion*** *en a).*

(2) Il existe un difféomorphisme local Ψ de R^p, défini au voisinage de $b = f(a)$, tel que $\Psi \circ f$ soit la restriction à un voisinage de a de l'injection canonique $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-n}$.

(3) f est localement inversible à gauche en a.

La démonstration est analogue à celle du corollaire précédent.