P.Aimé. 19/07/07
Calcul différentiel/Différentielles/
Composition des applications différentiables/demo8.pdf

Proposition 2

f est une application continue, définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, g est une application continue, définie sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, et a est un point de U. *On suppose que $b = f(a) \in V$, de sorte que l'application $g \circ f$ est définie et continue dans l'ouvert $f^{-1}(V)$* inclus dans U.

Si l'application f est différentiable en un point $a \in U$, et si l'application g est différentiable au point $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable au point a, et

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_a f,$$

autrement dit,

$$\forall \Delta a \in \mathbb{R}^n,\ d_a(g \circ f)(\Delta a) = \left(d_{f(a)}g\right)(d_a f(\Delta a)).$$

Traduction matricielle : les matrices jacobiennes dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^m$ respectivement, vérifient la relation

$$J_a(g \circ f) = J_{f(a)}g.J_a f.$$

autrement dit, pour $i = 1,..,m$, et $j = 1,..,n$,

$$\frac{\partial (g \circ f)^i}{\partial x^j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g^i}{\partial y^k}(f(a)) \frac{\partial f^k}{\partial x^j}(a).$$

Démonstration

Par hypothèse,

- il existe une application linéaire L_a de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, et une application ε_a définie au voisinage de $\overrightarrow{0}$ dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, telle que

$$f(a + \Delta a) = f(a) + L_a(\Delta a) + \|\Delta a\| \varepsilon_a(\Delta a), \tag{1}$$

- il existe une application linéaire L_b de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$, et une application ε_b définie au voisinage de $\overrightarrow{0}$ dans $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, telle que

$$g(b + \Delta b) = g(b) + L_b(\Delta b) + \|\Delta b\| \varepsilon_b(\Delta b). \tag{2}$$

Par abus, $\|\|$ désigne une norme dans $\mathbb{R}^n$ et dans $\mathbb{R}^p$.

Sachant que $b = f(a)$, posons $\Delta b = f(a + \Delta a) - f(a)$. En raison de la continuité de f en a, il existe un voisinage de a dans lequel on peut écrire, compte tenu de la relation (2) :

$$\begin{aligned} & g(f(a + \Delta a)) - g(f(a)) \\ = \ & L_b(f(a + \Delta a) - f(a)) + \|L_a(\Delta a) + \|\Delta a\| \varepsilon_a(\Delta a)\| \varepsilon_b(f(a + \Delta a) - f(a)), \end{aligned}$$

et compte tenu de la relation (1),

$$
\begin{aligned}
& g\left(f\left(a+\Delta a\right)\right)-g\left(f\left(a\right)\right)-\left(L_b\circ L_a\right)\left(\Delta a\right)\\
= \quad & \|\Delta a\|\,\varepsilon_a(\Delta a)+\|L_a(\Delta a)+\|\Delta a\|\,\varepsilon_a(\Delta a)\|\,\varepsilon_b\left(f\left(a+\Delta a\right)-f(a)\right)\\
= \quad & \|\Delta a\|\,L_b\left(\varepsilon_a(\Delta a)\right)+\|L_a(\Delta a)+\|\Delta a\|\,\varepsilon_a(\Delta a)\|\,\varepsilon_b\left(f\left(a+\Delta a\right)-f(a)\right).
\end{aligned}
$$

Il reste à en déduire que $(L_b\circ L_a)$ est une application linéaire tangente à $g\circ f$ au point a. Compte tenu de la continuité de L_b, et de la majoration

$$\|L_a(\Delta a)+\|\Delta a\|\,\varepsilon_a(\Delta a)\|\leq\|L_a(\Delta a)\|+\|\Delta a\|\,\|\varepsilon_a(\Delta a)\|$$

Pour cela, il suffit de prouver que

$$\lim_{\Delta a\to 0}\frac{\|L_a(\Delta a)\|\,\varepsilon_b\left(f\left(a+\Delta a\right)-f(a)\right)}{\|\Delta a\|}=0,$$

c'est une propriété connue qui est équivalente à la continuité de l'application linéaire L_a. Rappelons sa justification :

$$\frac{\|L_a(\Delta a)\|}{\|\Delta a\|}=\left\|\frac{L_a(\Delta a)}{\|\Delta a\|}\right\|=\left\|L_a(\frac{\Delta a}{\|\Delta a\|})\right\|.$$

L'application linéaire L_a étant continue, est bornée sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, il existe donc une constante $K>0$ telle que $\|L_a(\Delta a)\|\leq K\,\|\Delta a\|$, ce qui donne la conclusion. ■

Proposition 4

Soient f,g deux champs ***scalaires*** *de classe C^1, définis sur un ouvert $U\subset\mathbb{R}^n$.*

1) Le produit fg est de classe C^1 sur U, et pour tout point $a\in U$,

$$d_a(fg)\,(\Delta a)=f(a)\;d_ag\,(\Delta a)+g(a)\;d_af\,(\Delta a)\,.$$

2) L'ensemble V des points de U pour lesquels $g(a)\neq 0$ est ouvert et le quotient $\frac{f}{g}$ est de classe C^1 sur V. Pour tout point $a\in V$,

$$d_a(\frac{f}{g})\,(\Delta a)=\frac{g(a)\;d_af\,(\Delta a)-f(a)\;d_ag\,(\Delta a)}{\left(g(a)\right)^2}.$$

3) L'ensemble W des points de U pour lesquels $f(a)>0$ est ouvert et la fonction $\sqrt{f}$ est de classe C^1 sur W. Pour tout point $a\in W$,

$$d_a(\sqrt{f})\,(\Delta a)=\frac{d_af(\Delta a)}{2\sqrt{f(a)}}.$$

4) De même, les formules des différentielles de $\exp(f)$ *et* $\log(|f|)$ sont

$$
\begin{aligned}
d\left(\exp(f)\right) &= \exp(f)\;df\\
d\left(\log\left(|f|\right)\right) &= \frac{df}{f}.
\end{aligned}
$$

5) *Si* $\|\|$ *est la norme dans* $\mathbb{R}^n$ *associée au produit scalaire, et si* γ *est un arc paramétré* C^1 *tracé sur* $\mathbb{R}^n$*, alors pour tout* $a \in \mathbb{R}^n$*, et* $\Delta a \in \mathbb{R}^n$*,*

$$\begin{aligned} d_a\left(\|\|^2\right)(\Delta a) &= 2\langle a, \Delta a\rangle \text{ et pour } a \neq 0,\ d_a\left(\|\|\right)(\Delta a) = \frac{\langle a, \Delta a\rangle}{\|a\|}, \\ \frac{d}{dt}\left(\|\gamma(t)\|^2\right) &= 2\langle \gamma(t), \gamma'(t)\rangle \text{ et } \frac{d}{dt}\left(\|\gamma(t)\|\right) = \frac{\langle \gamma(t), \gamma'(t)\rangle}{\|\gamma(t)\|}. \end{aligned}$$

Démonstration

Il faut prouver dans chaque cas, que les expressions données comme différentielle sont bien des applications linéaires tangentes.

Pour les propriétés 1) et 5), iIl suffit de remarquer que le produit comme le produit scalaire sont de la forme

$$v \overset{\theta}{\longmapsto} (f(v), g(v)) \overset{B}{\longmapsto} B(\ f(v), g(v))$$

où θ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$, et B est bilinéaire.

La différentielle de θ est évidemment (df, dg).

Pour la différentielle de B, on rappelle (cf. article Application linéaire tangente, demo5.pdf), que $d_{(a,b)}B\,(\Delta a, \Delta b) = B(a, \Delta b) + B(\Delta a, b)$.

Pour la propriété 2), il est plus simple de commencer par $\frac{1}{g}$ et appliquer ensuite la formule du produit. Ecrivons

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(a+\Delta a)} - \frac{1}{g(a)} &= -\left(\frac{g(a+\Delta a) - g(a)}{g(a+\Delta a)\ g(a)}\right) \\ &= -\frac{dg_a(\Delta a) + \|\Delta a\|\,\varepsilon_a(\Delta a)}{g(a+\Delta a)\ g(a)}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|\Delta a\|}\left(\frac{1}{g(a+\Delta a)} - \frac{1}{g(a)} + \frac{dg_a(\Delta a)}{(g(a))^2}\right) \\ = \quad & dg_a\left(\frac{\Delta a}{\|\Delta a\|}\right)\left(\frac{1}{(g(a))^2} - \frac{1}{g(a+\Delta a)\ g(a)}\right) + \frac{\varepsilon_a(\Delta a)}{g(a+\Delta a)\ g(a)} \end{aligned}$$

La continuité de g en a, et de la différentielle dg_a donnent la conclusion.

Les autres vérifications sont analogues. ■