P.Aimé. 18/07/07
Calcul différentiel/Différentielles/Exemples de difféomorphismes/demo7.pdf

Enoncé

Les applications suivantes, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sont-elles des difféomorphismes ?

Si ce n'est pas le cas, préciser si l'on peut se restreindre à un ouvert convenable sur lequel on obtient un difféomorphisme de cet ouvert sur son image, et interpréter les arcs transformés des droites parallèles aux axes, dont on donne la représentation.

1. $f_1(x,y) = (e^x - e^y, x+y)$
2. $f_2(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$
3. $f_3(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$

Solution

Dans tous les cas, on cherche un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ sur lequel les trois hypothèses du théorème d'inversion sont vérifiées :

- f est C^1 sur U, on sait que pour cela, il suffit que les dérivées partielles soient continues, on écrit donc la matrice jacobienne en tout point de U. Rappelons que ses colonnes sont les vecteurs dérivées partielles.

- f est injective sur U, donc bijective de U sur $f(U)$ (si possible, on détermine $f(U)$, selon le théorème d'inversion, c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$),

- En tout point de U, la matrice jacobienne de f est inversible, en pratique son déterminant est non nul.

1. (a) $J_{(x,y)}f_1 = \begin{pmatrix} e^x & -e^y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, les d.p. sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

   Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. S'il existe (x,y) tel que
   $$(e^x - e^y, x+y) = (e^a - e^b, a+b),$$
   alors
   $$\begin{aligned} y &= a+b-x \\ e^{2x} - e^x\left(e^a - e^b\right) - e^{a+b} &= 0. \end{aligned}$$
   Le changement de variable $X = e^x$, et la résolution de l'équation du second degré en X montrent qu'il existe une soution unique (sachant que $X > 0$), f_1 est donc injective.

   Enfin $\det\left(J_{(x,y)}f_1\right) = e^x + e^y \neq 0$.

   En conclusion, f_1 est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f_1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

   On peut préciser que $f_1\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}^2$, sachant que pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $(e^x - e^y, x+y) = (\alpha,\beta)$ possède une solution (d'après le raisonnement qui conduit à l'injectivité).

(b) L'arc image d'une droite verticale $x = a$, paramétrée par y, est paramétré par

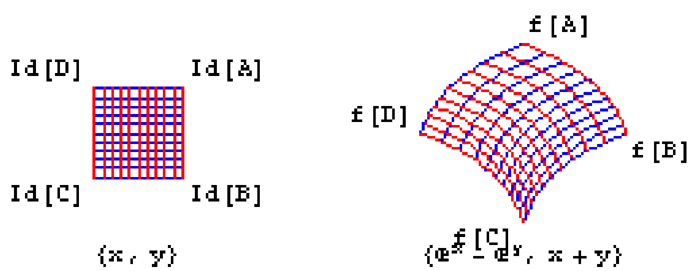
$$\gamma(y) = (X, Y) = (e^a - e^y, a + y)\,.$$

Les points de γ appartiennent donc à la courbe d'équation cartésienne $Y = a + \ln(e^a - X)$. En se limitant à la famille des segments compris entre $[A, B]$ et $[C, D]$ sur la figure ci-dessous, cela donne les courbes en rouge.

(c) L'arc image d'une droite horizontale $y = b$, paramétrée par x, est paramétré par

$$\eta(x) = (X, Y) = \left(e^x - e^b, x + b\right).$$

Les points de γ appartiennent donc à la courbe d'équation cartésienne $Y = b + \ln\left(e^b + X\right)$. En se limitant à la famille des segments compris entre $[A, B]$ et $[C, D]$ sur la figure ci-dessous, cela donne les courbes en bleu.



2. Pour les exemples 2,3,4 la méthode est analogue, bien qu'il soit parfois intéressant de permuter l'ordre des vérifications.

(a) $J_{(x,y)} f_2 = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$, les d.p. sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
$\det\left(J_{(x,y)} f_2\right) = 4\left(x^2 - y^2\right)$. On se restreint donc à l'un des quatre quarts de plans ouverts bordés par les droites $|x| = |y|$. Par exemple U_1, défini par $x^2 > y^2$ et $x > 0$, les autres étant notés U_i, $i = 2, 3, 4$, et $\Omega = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{4} U_i$.
Traitons simultanément les questions d'injectivité et de surjectivité, c'est à dire le système

$$(x^2 + y^2, 2xy) = (u, v)\,.$$

où $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ est donné.
- Si $(u,v)=0$, la seule solution est $(x,y)=(0,0)\notin\Omega$.
- Si $u<0$, un point (u,v) n'a pas d'antécédent.
- Si $v=0$, $u>0$, le point (u,v) possède quatre antécédents $(0,\pm\sqrt{u})$, $(\pm\sqrt{u},0)$ donc un seul dans chacun des ouverts U_i.
- Si $u^2>v^2$ et $u>0$, le point (u,v) possède quatre antécédents $x=\pm\sqrt{u\pm\sqrt{u^2-v^2}}$, $y=\frac{v}{2x}$, qui appartiennent à Ω (vérifier que $x^2=y^2$ est exclu), répartis sur le cercle $x^2+y^2=u$, de rayon $\sqrt{u}$, les arguments sont de la forme θ, $\theta+\pi$, $\frac{\pi}{2}-\theta$, $-\frac{\pi}{2}-\theta$, il y a donc un un seul dans chacun des ouverts U_i.
- Si $u^2<v^2$, un point (u,v) n'a pas d'antécédent.

En conclusion, la restriction de f_2 à chacun des ouverts U_i est un C^1-difféomorphisme de U_i sur $f_2(U_i)=V$, V étant le secteur ouvert défini par $u^2>v^2$, $u>0$.

(b) L'arc image d'un segment de droite vertical $x=a>0$, $y^2<a^2$, inclus dans U_1, paramétrée par y, est paramétré par

$$\gamma(y)=(X,Y)=\left(a^2+y^2,2ay\right).$$

Les points de γ appartiennent donc à la courbe d'équation cartésienne $X=a^2+\frac{Y^2}{4a^2}$, c'est un segment de parabole inclus dans V, dont les extrémités sont les points $\left(2a^2,\pm2a^2\right)$.
L'arc image d'une demi-droite horizontale $y=b$, $x^2>b^2$, inclus dans U_1, paramétrée par x, est paramétré par

$$\gamma(y)=(X,Y)=\left(b^2+x^2,2bx\right).$$

Les points de γ appartiennent donc à la courbe d'équation cartésienne $X=b^2+\frac{Y^2}{4b^2}$, c'est une portion de parabole incluse dans V, dont l'extrémité est le point $\left(2b^2,\pm2b^2\right)$.

3. La fonction f_3 est la traduction dans $\mathbb{R}^2$ de l'application $z\longmapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

(a) $J_{(x,y)}f_3=\begin{pmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}$, les d.p. sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
$\det\left(J_{(x,y)}f_3\right)=4\left(x^2+y^2\right)$. On se place pour commencer sur le complémentaire de l'origine.
Le système $(x^2-y^2,2xy)=(a^2-b^2,2ab)$, avec $(a,b)\neq(0,0)$ donne $x^2=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, et donc deux solutions symétriques par rapport à l'origine.
Une résolution avec les coordonnées polaires (module/argument de z) est plus directe encore, $\left|z^2\right|=|z|^2$ et $\arg z^2=2\arg z$.
Finalement, on restreint f_3 à un demi-plan ouvert bordé par une droite passant par l'origine, par exemple U défini par $x>0$, et f_3

est un C^1 difféomorphisme de U sur $f_3(U)$, complémentaire de la demi-droite $v = 0$, $u \leq 0$.

(b) L'arc image d'une droite verticale $x = a > 0$, $y \in \mathbb{R}$, est paramétré par

$$\gamma(y) = (X, Y) = \left(a^2 - y^2, 2ay\right).$$

Les points de γ appartiennent donc à la courbe d'équation cartésienne $X = a^2 - \frac{Y^2}{4a^2}$, c'est une parabole entièrement décrite, contenue dans $f_3(U)$ (courbes en rouge sur la figure de l'énoncé).

De même, f_3 transforme les demi-droites horizontales $x > 0$, $y = b$ en demi-paraboles, et pour deux valeurs opposées de b, la réunion est une parabole (courbes en bleu sur la figure de l'énoncé).