P.Aimé. 15/07/07
Calcul différentiel/Différentielles/Exemple de différentiabilité/demo6.pdf

Enoncé
L'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{c}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\text{ si }(x,y)\neq(0,0)\\ 0\text{ sinon}\end{array}\right.$$

est elle de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$?

Solution
1- Dans $\mathbb{R}^2\backslash\left\{\overrightarrow{0}\right\}$, les dérivées partielles sont des fonctions rationnelles donc continues. f est donc C^1 dans cet ouvert (le calcul des dérivées partielles est inutile jusqu'ici).

2- Pour étudier la différentiabilité de f à l'origine, il faut commencer par l'existence des dérivées partielles, puis vérifier la formule de Taylor.

Or $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=1$ et $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=-1$ donc $\partial_1 f\,(0,0)=1$ et $\partial_2 f\,(0,0)=-1$.

De plus, avec la norme euclidienne,

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-\Delta x+\Delta y}{\|(\Delta x,\Delta y)\|}=\frac{\Delta x\Delta y\,(\Delta y-\Delta x)}{\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On peut voir que cette expression n'a pas de limite lorsque $\|(\Delta x,\Delta y)\|=\rho$ rend vers 0, en posant $\Delta x=\rho\cos\theta$, $\Delta y=\rho\sin\theta$.

Finalement, f n'est pas différentiable à l'origine. A fortiori, elle n'est pas de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ (à nouveau, la conclusion ne nécessite pas de calcul des dérivées partielles en dehors de l'origine).