P.Aimé. 06/07/08
Systémes évolutifs/Transformation de Laplace/Transformer une fonction causale (L1), demo26.pdf

Démonstration des propriétés du tableau demo25.pdf

1. $f(t) = 1$, $t \geq 0$ $\quad F(z) = \mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z}$ $\quad \sigma(f) = 0$

   On observe que $|e^{-zt}| = e^{-xt}$ si $z = x + iy$, et que e^{-xt} est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour $x > 0$, et non intégrable si $x \leq 0$. Il en résulte que $\sigma(f) = 0$, et $\int_{[0,+n[} e^{-zt}dt = \frac{1}{z}(1 - e^{-nz})$ donne $\int_{[0,+\infty[} e^{-zt}dt = \frac{1}{z}$.

2. $f(t) = e^{at}, a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $t \geq 0$ $\quad F(z) = \mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z-a}$ $\quad \sigma(f) = \alpha$

   $|f(t)e^{-zt}| = |f(t)|\, e^{-xt} = e^{(\alpha - x)t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour $(\alpha - x) < 0$ seulement. On achève comme précédemment.

3. La fonction appelée "échelon" est ainsi définie : t_0, h et A sont des constantes positives (non nulles) données, f est la fonction en escalier égale à A sur $[t_0, t_0 + h]$, nulle ailleurs.

   L'intégrale est donnée par la primitive sur $[t_0, t_0 + h]$, il en résulte que $\sigma(f) = 0$, et
$$F(z) = \mathcal{L}(f)(z) = \frac{A}{z} e^{-zt_0}(1 - e^{-zh}).$$

4. $f(t) = \sin \omega t$, $\omega \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ $\quad F(z) = \mathcal{L}(f)(z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}$ $\quad \sigma(f) = 0$

   Si $x > 0$, $|\sin t|\, e^{-xt} \leq e^{-xt}$, si $x = 0$, $|\sin t|$ est continue mais non intégrable sur $[0, +\infty[$ (l'intégrale est la somme d'une suite infinie de termes égaux à 2).

   Il en résulte que $\sigma(f) = 0$.

   Calcul pour $x > 0$:
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(z) &= \int_{[0,+\infty[} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} e^{-zt}dt \\ &= \frac{1}{2i}\int_{[0,+\infty[} e^{-(z-i\omega)t}dt - \frac{1}{2i}\int_{[0,+\infty[} e^{-(z+i\omega)t}dt \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i\omega} - \frac{1}{z+i\omega}\right) \\ &= \frac{\omega}{\omega^2 + z^2}. \end{aligned}$$

5. Les formuless $\begin{array}{lll} \cos \omega t,\ \omega \in \mathbb{R} & \frac{z}{z^2+\omega^2} & 0 \\ \text{sh } \omega t,\ \omega \in \mathbb{R} & \frac{\omega}{z^2-\omega^2} & \omega \\ \text{ch } \omega t,\ \omega \in \mathbb{R} & \frac{z}{z^2-\omega^2} & \omega \end{array}$ se démontrent à l'identique, à l'aide des combinaisons linéaires d'exponentielles.

6. $f(t) = t$, $t \geq 0$ $\quad F(z) = \mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z^2}$ $\quad \sigma(f) = 0$

   Même méthode que pour l'exemple 1), regarder l'intégrabilité du module, puis l'intégrale.

7. $t^n e^{z_0 t}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad \mathcal{L}(f)(z) = \frac{n!}{(z-z_0)^{n+1}}$ $\quad \sigma(f) = \text{Re } (z_0)$

   Ce résultat est admis ici (Cf. article Transfert (L1)).

Démonstration de la propriété générale pour les fonctions f est causales et "d'ordre exponentiel à l'infini", c'est à dire qu'il existe $M > 0$, $k > 0$, $t_0 > 0$ tels que

$$\forall t \geq t_0, \qquad |f(t)| < M\ e^{kt}$$

1. Sur $[0, t_0]$, la mesure de $|f(t)e^{-zt}|$ est finie car elle est majorée par $\left(\sup_{[0,t_0]} e^{-xt}\right)\left(\int_{[0,t_0]} |f|\right)$.

$|f(t)e^{-zt}| = |f(t)|\, e^{-xt}$ est intégrable sur $[t_0, +\infty[$, si et seulement si $(k - x) < 0$, ceci résulte de la majoration

$$|f(t)|\, e^{-xt} \leq M e^{(k-x)t}.$$