P.Aimé. 22/06/08
Integration/Elements d'aire/2-formes sur une nappe, élément d'aire, forme dS demo23.pdf

Proposition
L'aire de Σ est donnée par

$$\begin{aligned}
\oint_{\Sigma} \lambda^{\Sigma} &= \oint_{\mathcal{V}} dS \\
&= \iint_{\mathcal{V}} \sqrt{\det \operatorname{Gram}\left(\partial_u F(u,v), \partial_v F(u,v)\right)} du dv \\
&= \iint_{\mathcal{V}} \|N(u,v)\| \, du dv.
\end{aligned}$$

avec $N = \partial_u F \times \partial_v F$ (produit vectoriel).

Démonstration
$\mathbb{R}^2$ est orienté par la base canonique (i, j).
Etape 1

$F^* \lambda^{\Sigma}$ et $\lambda_2 = \det_{(i,j)} = du \wedge dv$ sont des 2-formes (non nulles) sur l'ouvert $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, domaine de paramétrisation de Σ. Il existe donc une fonction réelle A tel que $F^* \lambda^{\Sigma} = A \lambda_2$.

Etape 2
Donnons l'expression de A en notant P la matrice de passage d'une base orthonormale directe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ du plan tangent à Σ en $m = F(u,v)$, à la base naturelle $(\partial_1 F(u,v), \partial_2 F(u,v))$.

$$\begin{aligned}
A(u,v) &= A(u,v) \lambda_2 (i,j) = \left(F^* \lambda^{\Sigma}\right)_{(u,v)} (i,j) \\
&= \lambda_m^{\Sigma} \left(dF_{(u,v)}(i), dF_{(u,v)}(i)\right) \text{ (Définition de la transposée)} \\
&= \lambda_m^{\Sigma} \left(\partial_1 F(u,v), \partial_2 F(u,v)\right) \\
&= \det_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \left(\partial_1 F(u,v), \partial_2 F(u,v)\right) \quad \text{(Définition de } \lambda^{\Sigma}) \\
&= \det P.
\end{aligned}$$

On sait par ailleurs que $\operatorname{Gram}(\partial_u F, \partial_v F) = {}^t P P$, donc $\det P = \sqrt{\det \operatorname{Gram}\left(\partial_u F, \partial_v F\right)}$.
Le reste est une formule connue donnant la norme du produit vectoriel. Rappelons-en la démonstration.

$$\begin{aligned}
\|N(u,v)\| &= \|\partial_u F \times \partial_v F\| = \|\partial_u F\| \, \|\partial_v F\| \, |\sin(\partial_u F, \partial_v F)| \\
&= \|\partial_u F\| \, \|\partial_v F\| \sqrt{1 - \cos^2(\partial_u F, \partial_v F)} \\
&= \sqrt{\|\partial_u F\|^2 \, \|\partial_v F\|^2 - \langle \partial_u F, \partial_v F \rangle^2} \\
&= \sqrt{\det \mathrm{Gram}\,(\partial_u F, \partial_v F)}.
\end{aligned}$$

Etape 3

Calculons l'aire de Σ c'est à dire $\oint\limits_{\Sigma} \lambda^{\Sigma}$ par définition de l'aire.

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\Sigma} \lambda^{\Sigma} &= \oint\limits_{\mathcal{V}} F^* \lambda^{\Sigma} \quad \text{(Définition de l'intégrale d'une 2-forme)} \\
&= \oint\limits_{\mathcal{V}} A(u,v) \; du \wedge dv \\
&= \iint\limits_{\mathcal{V}} A(u,v) \; dudv
\end{aligned}$$

La dernière égalité résulte de la définition de l'intégrale d'une 2-forme sur un ouvert du plan (on se reportera à l'article 246 "Intégrale d'une 2-forme, flux (introduction)", du concept "2-3 formes différentielles".

■