P.Aimé. 29/03/08
Integration/Elements d'aire/Paradoxe du lampion demo21.pdf

Solution

Σ est le tronc de cylindre de haureur $h > 0$, paramétré par

$$\mathcal{V} =]0, 2\pi[\times]0, h[\, , \Phi(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$$

L'aire de Σ est donc

$$\iint\limits_{\mathcal{V}} \|N(u, v)\| \, dudv = 2\pi Rh.$$

Pour simplifier, on prend $R = 1$ dans la suite.
N et q sont deux entiers non nuls.

1. On trace sur le rectangle $\mathcal{V}$ une suite de $2N + 1$ segments horizontaux, pour

$$v = 0, \frac{h}{2N}, .., k\frac{h}{2N}, .., h.$$

Sur chacun des segments où k est pair, on marque q points correspondant à $u = l\frac{2\pi}{q}$, $l = 0, .., q - 1$.
Sur chacun des segments où k est impair, on marque q points correspondant à $u = \lambda\frac{\pi}{q}$, $\lambda = 1, 3, .., 2q - 1$.

Lorsqu'on transporte tous les points sur le cylindre par Φ, on observe qu'entre deux "couches" de points, il y a $2q$ triangles isométriques dont les sommets sont sur le cylindre. D'autre part, il y a $2N + 1$ segments donc $2N$ "couches", ce qui donne un nombre de triangles de $4Nq$.

1. Lorsqu'on transporte tous les points sur le cylindre par Φ, on observe

qu'entre deux "couches" de points, il y a $2q$ triangles isométriques dont les sommets sont sur le cylindre. D'autre part, il y a $2N + 1$ segments donc $2N$ "couches", ce qui donne un nombre de triangles de $4Nq$.

2. Evaluons l'aire du triangle formé par l'image des points $(u, v) = (0, 0)$, $\left(\frac{2\pi}{q}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{q}, \frac{h}{2N}\right)$,

Tout d'abord, les images de ces points sont respectivement A,B et C:

$$\Phi\left(\frac{\pi}{q}, \frac{h}{2N}\right) = (\cos\frac{\pi}{q}, \sin\frac{\pi}{q}, \frac{h}{2N})$$

$$\Phi(0, 0) = (\cos 0, \sin 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$\Phi\left(\frac{2\pi}{q},0\right) = (\cos\frac{2\pi}{q},\sin\frac{2\pi}{q},0)$$

Calculons l'aire du triangle en utilisant la formule (issue du détermiant de Gram)

$$\mathcal{A}\left(ABC\right) = \frac{1}{2}\left(AB^2CB^2 - \left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Calculs intermédiaires :

$$\overrightarrow{AB} = (\cos\frac{\pi}{q}-1,\sin\frac{\pi}{q},\frac{h}{2N})$$

$$\overrightarrow{BC} = (\cos\frac{2\pi}{q}-1,\sin\frac{2\pi}{q},0)$$

donc

$$AB^2 = (\cos\frac{\pi}{q}-1)^2+\sin^2\frac{\pi}{q}+\left(\frac{h}{2N}\right)^2$$

$$BC^2 = (\cos\frac{2\pi}{q}-1)^2+\sin^2\frac{2\pi}{q}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right\rangle^2 &= \left(\left(\cos\frac{\pi}{q}-1\right)\left(\cos\frac{2\pi}{q}-1\right)+\sin\frac{\pi}{q}\sin\frac{2\pi}{q}\right)^2\\
&= \left(\cos\frac{\pi}{q}-1\right)^2\left(\cos\frac{2\pi}{q}-1\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{q}\sin^2\frac{2\pi}{q}\\
&\quad +2\left(\cos\frac{\pi}{q}-1\right)\left(\cos\frac{2\pi}{q}-1\right)\sin\frac{\pi}{q}\sin\frac{2\pi}{q}.
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
4\mathcal{A}\left(ABC\right)^2 &= \left(\sin\frac{\pi}{q}\left(\cos\frac{2\pi}{q}-1\right)-\sin\frac{2\pi}{q}\left(\cos\frac{\pi}{q}-1\right)\right)^2+\frac{h^2}{N^2}\sin^2\frac{\pi}{q}\\
&= \left(\sin\frac{\pi}{q}\left(-2\sin^2\frac{\pi}{q}\right)-2\sin\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{q}\left(\cos\frac{\pi}{q}-1\right)\right)^2+\frac{h^2}{N^2}\sin^2\frac{\pi}{q}\\
&= 4\sin^2\frac{\pi}{q}\left(1-\cos\frac{\pi}{q}\right)^2+\frac{h^2}{N^2}\sin^2\frac{\pi}{q}\\
&= 4\sin^2\frac{\pi}{q}\left(\frac{h^2}{4N^2}+\left(1-\cos\frac{\pi}{q}\right)^2\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{A}(ABC) = \sin\frac{\pi}{q}\sqrt{\frac{h^2}{4N^2} + \left(1-\cos\frac{\pi}{q}\right)^2}.$$

L'aire du polyèdre formé par les $4Nq$ triangles est donc donnée par :

$$\begin{aligned} S &= 4Nq\mathcal{A}(ABC) \\ &= 4Nq\sin\frac{\pi}{q}\left(\left(1-\cos\frac{\pi}{q}\right)^2 + \frac{h^2}{4N^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Pour $N = q^3$,

$$\lim_{q\to\infty} S = \lim_{q\to\infty} 4q^4\sin\frac{\pi}{q}\left(\left(1-\cos\frac{\pi}{q}\right)^2 + \frac{h^2}{4q^6}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Utilisons les développements limités de sinus et cosinus en 0

$$\begin{aligned} \lim_{q\to\infty} S &= \lim_{q\to\infty} 4q^4\left(\frac{\pi}{q} - \frac{\pi^3}{6q^3} + \frac{\pi^4}{q^4}\varepsilon\left(\frac{\pi}{q}\right)\right) \\ &\quad \times\left(\left(1-\left(1-\frac{\pi^2}{2q^2}+\frac{\pi^3}{q^3}\varepsilon\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)\right)^2 + \frac{h^2}{4q^6}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{q\to\infty}\left(4q^3\pi - \frac{2}{3}\pi^3 q + 4\pi^4\varepsilon\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi^2}{2q^2}+\frac{\pi^3}{q^3}\varepsilon\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)^2 + \frac{h^2}{4q^6}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \lim_{q\to\infty}\left(4q^3\pi - \frac{2}{3}\pi^3 q + 4\pi^4\varepsilon\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)\left(\frac{\pi^2}{2q^2}+\frac{\pi^3}{q^3}\varepsilon\left(\frac{\pi}{q}\right)\right) \\ &= \lim_{q\to\infty}\left(4q^3\pi - \frac{2}{3}\pi^3 q\right)\left(\frac{\pi^2}{2q^2}\right) \\ &= \lim_{q\to\infty}\left(2\pi^3 q - \frac{\pi^6}{3q}\right) \\ &= \lim_{q\to+\infty} 2\pi^3 q = +\infty. \end{aligned}$$