P.Aimé. 12/08/07
Integration/Elements de longueur/1-formes sur un arc, dl   demo20.pdf

Proposition

Soit $([a,b],\gamma)$ *une paramétrisation d'un arc* C^1*, et une suite* (S_n) *de subdivisions de* $[a,b]$*,* (S_n) *étant une liste de* $(n+1)$ *points de* $[a,b]$ *rangés en ordre croissant, de a à b :*

$$S_n = (a = t_0^n, t_1^n, ..., t_n^n = b).$$

Si $d(n)$ *est la plus grande des longueurs des segments* $\left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]$*, on suppose que* $\lim_{n\to\infty} d(n) = 0$.

Alors,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\gamma(t_{k+1}^n)-\gamma(t_k^n)\right\|\right)=\int_{[a,b]} dl=\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt.$$

Démonstration

Sachant que $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(t_{k+1}^n - t_k^n\right)\|\gamma'(t_k^n)\|\right)$, il suffit de prouver que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left\|\gamma(t_{k+1}^n)-\gamma(t_k^n)\right\|-\left(t_{k+1}^n-t_k^n\right)\|\gamma'(t_k^n)\|\right)\right)=0.$$

Sur chaque segment de chaque subdivision S_n, l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $t \longmapsto \gamma(t) - \gamma'(t_k^n)$ donne

$$\left\|\gamma(t_{k+1}^n)-\gamma(t_k^n)-\left(t_{k+1}^n-t_k^n\right)\gamma'(t_k^n)\right\|\le\left(t_{k+1}^n-t_k^n\right)\max_k\left\|\gamma'(t_{k+1}^n)-\gamma'(t_k^n)\right\|.$$

De plus, la fonction γ' est continue donc uniformément continue sur chaque segment, de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$, $\max_k \left\|\gamma'(t_{k+1}^n)-\gamma'(t_k^n)\right\|$ est majoré par $\varepsilon\, d(n)$ pour n assez grand.

La majoration

$$\begin{aligned}&\left|\left\|\gamma(t_{k+1}^n)-\gamma(t_k^n)\right\|-\left(t_{k+1}^n-t_k^n\right)\|\gamma'(t_k^n)\|\right|\\ \le\ &\left\|\gamma(t_{k+1}^n)-\gamma(t_k^n)-\left(t_{k+1}^n-t_k^n\right)\gamma'(t_k^n)\right\|\end{aligned}$$

donne la conclusion.

Complément. Une démonstration dans le cas particulier d'une paramétrisation cartésienne.

Si l'arc est paramétré par $x \longmapsto (x, f(x))$, on peut conclure sans recours à l'uniforme continuité.

En effet, on a ici

$$f(t_{k+1}^n)-f(t_k^n)=\left(t_{k+1}^n-t_k^n\right)f'(\tau_k^n)$$

d'après le théorème des accroissements finis, avec $\tau_k^n \in \left]t_k^n, t_{k+1}^n\right[$, et donc

$$\left\|\gamma(t_{k+1}^n) - \gamma(t_k^n)\right\| = \left(t_{k+1}^n - t_k^n\right)\sqrt{1 + \left(f'(\tau_k^n)\right)^2}$$

la somme est ici une somme de Riemann pour la fonction $\sqrt{1 + f'(t)^2}$, ce qui conduit directement au résultat.