P.Aimé. 07/08/07
Calcul différentiel\Dérivées\Théorème des accroissements finis, demo19.pdf

ENONCE et SOLUTION

Dans cet exercice, on démontre successivement les théorèmes de Rolle, des Accroissements finis, et le théorème de prolongement des fonctions dérivées, pour les fonctions réelles d'une variable réelle, définies sur un intervalle.

1. *Démontrer que si une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I, et admet un extremun (par exemple un maximum) en un point $a \in I$, alors $f'(a) = 0$.*

   Si $f'(a) = \lim_0 \frac{f(a+\Delta a)-f(a)}{\Delta a} > 0$, alors le taux d'accroissement, vu comme fonction de la variable Δa, est positif au moins dans un intervalle ouvert convenable centré en 0, donc pour $\Delta a > 0$ dans cet intervalle, $f(a+\Delta a) > f(a)$.

   De même, pour $\Delta a < 0$ dans un intervalle ouvert convenable centré en 0, $f(a+\Delta a) < f(a)$, de sorte que $f(a)$ ne peut être une valeur extrémale en a.

   On obtient une conclusion analogue si $f'(a) < 0$.

   Conclusion : en un point extrémal, ou bien la fonction n'est pas dérivable, ou bien sa dérivée est nulle. Attention, la réciproque est fausse (ex. x^3).

2. *Démontrer que si une fonction f est continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, avec $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$ (**Théorème de Rolle**).*

   Indication : on peut supposer f non constante, pourquoi ?. f admet alors un maximum ou un minimum en un point $c \in]a, b[$ (pourquoi c est-il distinct des extrémités a, b ?).

   Si f est constante sur $[a, b]$, la propriété est évidente. Sinon, f admet un maximum en un point $c \in [a, b]$ (propriétés des fonctions continues sur un segment), et si $c = a$ ou b, (comme pour x^2 sur $[-1, 1]$), on remplace maximum par minimum. Quoi qu'il en soit, l'un des deux est atteint en (au moins) un point $c \in]a, b[$, et la question 1 donne la conclusion.

3. *(**Egalité des accroissements finis**) Démontrer que si une fonction f est continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*
   $$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)\,.$$

   Indication : retrancher à f la fonction g, affine, qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Commencer par établir l'expression de $g(x)$.

   $g(x) - f(a) = (x - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. La fonction $(f - g)$ vérifie les hypothèses de la question 2, et $g'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, d'où la conclusion.

4. *(**Inégalité des accroissements finis**) Il résulte de l'égalité des accroissements finis que si une fonction f est continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et s'il existe un réel $M > 0$ tel que $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$, alors*

$$f(b) - f(a) \leq M\,(b - a)\,.$$

   C'est clair.

5. *(**Théorème de prolongement des dérivées**). Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$. On suppose que*

   (a) - *f est continue sur I,*
   - *f est dérivable sur $J = I \setminus \{a\}$,*
   - $\lim_{x \to a} f'(x)$ *existe (on note l cette limite).*

   Alors, f est dérivable au point a, et $f'(a) = l$ (la fonction f' est donc continue au point a).

   Démontrer cette propriété en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $g(x) = f(x) - lx$ sur un intervalle $[a, b]$ ou $[b, a]$ sur lequel $|f'(x) - l| \leq \varepsilon$, ε étant un réel > 0 fixé quelconque.

A tout $\varepsilon > 0$, la question précédente associe un intervalle $[a, b(\varepsilon)]$ *ou* $[b(\varepsilon), a]$ sur lequel la distance entre le taux de variation de f entre a et $b(\varepsilon)$ et l est inférieur à ε, c'est la définition de la dérivabilité de f en a, et cela prouve aussi que $f'(a) = l$.

Remarques

- Le théorème de prolongement des dérivées s'étend de manière évidente au cas où la fonction f est à valeurs dans R^n.

- C'est en raison du théorème de prolongement des dérivées que la dérivabilité aux bornes n'est pas une hypothèse dans les théorèmes de Rolle et des accroissements finis.