P.Aimé. 07/08/07

Calcul différentiel/Différentielles/Exemple d'homéomorphisme qui n'est pas un difféomorphisme,

demo18.pdf

ENONCE et SOLUTION

f est l'application définie sur la boule euclidienne unité ouverte D de R^n par

$$f(v) = \|v\|^2 v.$$

1. *Démontrer que f est injective (utiliser le fait que v et $f(v)$ sont colinéaires), et que $f(D) \subset D$.*

   Si $f(u) = f(v)$, alors $\|u\|^2 u = \|v\|^2 v$, l'égalité des normes donne $\|u\|^3 = \|v\|^3$, et donc $u = v$ sachant que u et v sont colinéaires et de même sens (argument absolument nécessaire).

   De plus, si $\|v\| < 1$, alors $\|f(v)\| < 1$.

2. *Vérifier que f est une bijection de D sur D dont la réciproque est définie par*

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} \|V\|^{-\frac{2}{3}} V & \text{si } V \neq 0 \\ 0 & \text{si } V = 0. \end{cases}$$

   Si $V \in D$, l'équation $\|v\|^2 v = V$ possède une solution unique $v \in D$. En effet, v doit être de la forme λV, avec $\lambda > 0$, donc $\lambda^3 \|V\|^2 V = V$ donne $\lambda = \|V\|^{-\frac{2}{3}}$ si $V \neq 0$, et $f^{-1}(0) = 0$ en raison de l'injectivité, et de la relation $f(0) = 0$.

   On remarque que f est une transformation radiale du disque qui laisse invariant le centre et tous les points du bord.

3. *Justifier (sans calculs) la continuité de f et de f^{-1} en tout point de D autre que 0, et prouver la continuité de f puis de f^{-1} en 0.*

   $\lim_{V \to 0} \left\| f^{-1}(V) \right\| = \lim_{V \to 0} \|V\|^{\frac{1}{3}} = 0$, donc f^{-1} est continue à l'origine. La continuité ailleurs est évidente.

4. *Prouver que f est C^1 sur D, et calculer la différentielle.*

   On sait que le produit de deux champs scalaires C^1 est un champ scalaire C^1, f est le produit du carré de la norme euclidienne par l'identité (attention, la norme euclidienne n'est pas différentiable à l'origine). L'identité est à valeurs vectorielles, mais la propriété s'applique aux projections $\left(\|v\|^2 v^1, ..., \|v\|^2 v^n\right)$.

   En utilisant la formule de la différentielle d'un produit, ou les dérivées partielles, on obtient

$$d_v f(\Delta v) = \|v\|^2 \Delta v + 2 \langle v, \Delta v \rangle v.$$

5. *Démontrer que f est un C^1-difféomorphisme de $D\setminus\{0\}$ sur $D\setminus\{0\}$, mais que f^{-1} n'est pas différentiable à l'origine.*

Si $v \neq 0$, $d_v f$ est une bijection linéaire. En effet, si $d_v f(\Delta v) = 0$, alors v et Δv sont colinéaires et la relation $\|v\|^2 \Delta v = -2\langle v, \Delta v\rangle v$ donne $\|v\|^2 \|\Delta v\| = 2\|v\|^2 \|\Delta v\|$, donc $\Delta v = 0$, sachant que $v \neq 0$. Le théorème d'inversion globale donne la conclusion sur $D\setminus\{0\}$.

Par contre, f n'admet pas de dérivées partielles à l'origine car

$$\lim_0 \frac{f^{-1}\left(0, .., \Delta v^i, .., 0\right)}{\Delta v^i} = \lim_0 \frac{(0, .., 1, .., 0)}{\left(\Delta v^i\right)^{2/3}} = +\infty.$$