P.Aimé. 07/08/07
Calcul différentiel/Différentielles/Exemples d'équations aux dérivées partielles, demo17.pdf

EXERCICE 1

φ est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u,v) = (x,y)$ où

$$(x,y) = (uv, u+v).$$

1. Vérifier qu'il existe un demi plan P sur lequel la restriction de φ est un difféomorphisme, préciser l'ensemble $\varphi(P)$.
2. On envisage l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} + 3(u-v) f = 0 \tag{1}$$
où la fonction inconnue est une fonction scalaire C^1 dans P.
Ecrire l'équation équivalente vérifiée par la fonction $g = f \circ \varphi^{-1}$ sur $\varphi(P)$ (on remarque qu'il est inutile d'exprimer φ^{-1}).
3. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par g
(on posera $g(x,y) = G(x,y)e^{3x}$).
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1), dans P et dans $\mathbb{R}^2$.

SOLUTION

1. L'injectivité s'étudie avec l'équation $\varphi(u,v) = \varphi(a,b)$, équivalente à
$$\begin{cases} v^2 - (a+b)v + ab = 0 \\ u = a+b-v \end{cases}$$
On obtient deux solutions (a,b) et (b,a) symétriques par rapport à la droite $\Delta : u = v$.
Si P est l'un des deux demi-plans bordé par Δ, la restriction de φ à P est donc injective.
Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $\varphi(u,v) = (x,y)$ n'admet des solutions que si $y^2 - 4x > 0$.
En conclusion, φ est une bijection de P sur la partie du plan définie par $y^2 - 4x > 0$, bordée par la parabole $y^2 - 4x = 0$.
De plus, la matrice jacobienne de φ est $\begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui prouve que φ est C^1, et le déterminant jcobien ne s'annule pas sur P.
Le théorème d'inversion globale prouve que φ est un C^1-difféomorphisme de P sur $\varphi(P)$, qui est une partie ouverte du plan (c'est une conséquence du théorème, mais évident par ailleurs, comme pré-image de $]0, +\infty[$ par $y^2 - 4x$ continue).

2. La relation $f = g \circ \varphi$, et le théorème de composition donnent

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(uv,u+v)} \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   En reportant dans l'équation, il vient $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - 3g(x,y) = 0$ avec $(x,y) \in \varphi(P)$.

   On remarquera que les équations en f et en g sont équivalentes en raison du fait que φ est un difféomorphisme.

3. Le changement de fonction suggéré conduit aussitôt à $g(x,y) = G(y)e^{3x}$, où G est une fonction C^1 arbitraire.

4. Il en résulte que si f est une solution dans $\mathbb{R}^2$, sa restriction à P est de la forme $f(u,v) = \alpha(u,v)\ e^{3uv}$, où α est une fonction C^1 arbitraire.

   Inversement, toute fonction de cette forme est visiblement une solution dans $\mathbb{R}^2$ (il suffit de reporter dans l'équation), on a ainsi obtenu toutes les solutions C^1 dans $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 2

1. On rappelle que l'application

$$\begin{array}{ccc} g & : & U =]0,+\infty[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

   définit un C^1-difféomorphisme de U sur $g(U)$, quel est l'ensemble $g(U)$?

   Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire C^1, on pose $F = f \circ g$.

2. Ecrire la matrice jacobienne de F en un point $(r,\theta) \in U$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3. En déduire la matrice jacobienne de f en un point $(x,y) = g\,(r,\theta) \in g(U)$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ au point (r,θ).

4. On s'intéresse aux fonctions scalaires f, C^1 sur le demi plan $x > 0$ de $\mathbb{R}^2$, telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x} \tag{2}$$

   (a) Par un changement de variables revenant à remplacer f par la fonction F ci-dessus, démontrer que la fonction F doit vérifier l'équation

$$r\frac{\partial F}{\partial r} = \tan\theta \tag{3}$$

(b) Donner la forme générale des solutions de (3).

(c) En déduire l'expression d'une fonction f, solution de (2) pour laquelle $f(1,0)=0$.

SOLUTION

Le changement de variables est bien connu (coordonnées polaires), et le raisonnement est analogue à l'exercice 1, la solution sera donc abrégée.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{(r\cos\theta, r\sin\theta)} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Rappelons la formule $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

La résolution du système ou la matrice inverse permet d'écrire le système équivalent sachant que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} \end{aligned}$$

ce qui donne $r\frac{\partial F}{\partial r} = \tan\theta$, et donc (sachant que $r \neq 0$), $F(r,\theta) = \ln r \ \tan\theta + \alpha(\theta)$.

Finalement, $f(x,y) = \frac{y}{x} \ \ln\sqrt{x^2+y^2}$ est, dans le domaine considéré, **une** solution telle que $f(1,0)=0$.