P.Aimé. 06/08/07
Calcul différentiel/Différentielles/Exemples de différentielles, demo16.pdf

ENONCES
EXERCICE 1

Calculer la différentielle en tout point $a \neq 0$ du champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par $X(v) = \frac{v}{\|v\|^2}$, $\|\|$ étant la norme euclidienne. Quelle est la nature géométrique de $d_a X$?

EXERCICE 2

Pour le pendule ponctuel, le paramètre déterminant la position est (par exemple) l'angle q avec la verticale descendante. $p = \frac{dq}{dt}$ est la vitesse angulaire, et l'équation du mouvement (en supposant la masse égale à 1) est $q'' = -\sin q$, que l'on met sous la forme d'une équation du premier ordre dans $\mathbb{R}^2$

$$(q', p') = (p, -\sin q) .$$

On pose $H(q,p) = \frac{p^2}{2} - \cos q$ (quelle est la signification physique de H ?). En dérivant la fonction composée $t \longmapsto H(q(t), p(t))$, prouver que chaque trajectoire est contenue dans un ensemble de niveau de H, c'est à dire $H(q,p) = c$, la constante c étant déterminée par les conditions initiales $q(0)$, $p(0)$.

EXERCICE 3

Une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est **homogène** (de degré α) s'il existe un réel α tel que

$$\forall (v,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad f(tv) = t^\alpha f(v)$$

1. Démontrer la relation d'Euler :

$$\sum_{i=1}^n v_i \partial_i f(v) = \alpha f(v).$$

   Indication : comparer les dérivées des fonctions $t \longmapsto f(tv)$ et $t \longmapsto t^\alpha f(v)$.

2. Application 1 : Si f est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, vérifier qu'elle est homogène de degré 2, et que $df(v)(v) = 2f(v)$.

3. Application 2 : $f(x,y) =$Arcsin $\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ (commencer par vérifier que f est C^1 sur un ouvert à préciser, sans calculer de dérivées partielles).

SOLUTIONS

EXERCICE 1

$X = \frac{Id}{g}$, les différentielles de Id et de g sont connues, on en déduit que

$$d_a X(\Delta a) = \frac{1}{\|a\|^2}\left(\Delta a - \frac{2\langle \Delta a, a\rangle}{\|a\|^2} a\right).$$

On sait que $\frac{\langle \Delta a, a\rangle}{\|a\|^2} a$ est le projeté orthogonal de Δa sur la droite de base a, $\Delta a - \frac{2\langle \Delta a, a\rangle}{\|a\|^2} a$ est donc le transformé de Δa par la réflexion d'hyperplan $a^{\perp}$, au total $d_a X$ est composée d'une réflexion et d'une homothétie, c'est une similitude indirecte.

EXERCICE 2

$\frac{d}{dt} H(q,p) = \frac{\partial H}{\partial q} q' + \frac{\partial H}{\partial p} p' = 0$, donc $H(q,p)$ est constant sur la trajectoire (constante de l'énergie, somme de l'énergie cinétique et potentielle).

EXERCICE 3

1. Si $g(t) = tv$, alors

$$(f \circ g)'(t) = df_{tv}(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i f(tv) = \alpha t^{\alpha - 1} f(v).$$

   La formule est obtenue avec $t = 1$.

2. C'est la caractérisation des formes quedratiques comme polynômes homogènes de degré deux.

3. On voit que f est homogène de degré 0. Il en résulte, sans calculs, que

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$