P.Aimé. 02/08/07
Formes différentielles/Formes de degré un/1-formes différentielles/demo15.pdf

Proposition 1 (Lemme de **Poincaré**)
S'il existe un point $a \in \mathcal{U}$ tel que le segment $[am]$ soit contenu dans U pour tout point $m \in U$ (on dit que U est étoilé par rapport au point a), alors toute forme différentielle fermée $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$, est exacte.

Démonstration
Soit $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$ une forme fermée.
Pour simplifier l'écriture, supposons que l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ est étoilé par rapport à 0, et vérifions que la fonction définie sur $\mathcal{U}$ par

$$f(x) = \int_0^1 \alpha_{tx}(x)dt$$

est une primitive de α.
En effet, si $\alpha(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x)\, dx^j$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha_{tx}(x)\right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j x_j \alpha_j(tx)\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\alpha_i(tx) + t\sum_j x_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(tx)\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\alpha_i(tx) + t\sum_j x_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(tx)\right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t\alpha_i(tx)\right) dt \\
&= \alpha_i(x).
\end{aligned}$$

■

Proposition 2
Etant donné une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$ sur un ouvert U de R^n, et une application $\varphi \in C^1(\mathcal{V},\mathcal{U})$ définie sur un ouvert V de R^p (sans relation imposée entre n et p), si $\alpha(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x)\, dx^j$, la forme transposée $(\varphi^*\alpha)(q) = \sum_{i=1}^p a_i(q)\, dq^i$ s'exprime ainsi, en posant $x = \varphi(q)$,

$$(\varphi^*\alpha)_q = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j(\varphi(q))\ \frac{\partial x^j}{\partial q^i}(q)\right)\ dq^i.$$

Démonstration
Exprimons les fonctions a_i à l'aide des fonctions α_j,

$$\begin{aligned}
\left(\varphi^*\alpha\right)_q(h) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\ dx^j\left(d\varphi_q(h)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\ dx^j\left(\sum_{i=1}^{p} h^i \partial_i \varphi(q)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\ \left(\sum_{i=1}^{p} h^i \partial_i \varphi^j(q)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} h^i\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\ \partial_i \varphi^j(q)\right).
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\left(\varphi^*\alpha\right)_q = \sum_{i=1}^{p} a_i(q)\ dq^i \quad \text{avec} \quad a_i(q) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\ \partial_i \varphi^j(q).$$

■

Proposition 3
Les données sont celles de la définition de la transposée d'une 1-forme.

1. *Si* f *est un champ scalaire* C^1 *sur* U*, alors* $\varphi^*(f\alpha) = (f\circ\varphi)\ \varphi^*\alpha$.
2. $\varphi^*(df) = d(f\circ\varphi)$.
3. *Si la composée a un sens,* $(\psi\circ\varphi)^*\alpha = \varphi^*(\psi^*\alpha)$.
4. *Si* Φ *est un* C^1 *difféomorphisme (ce qui impose* $p = n$*), alors*

$$\beta = \Phi^*\alpha \Longrightarrow \alpha = \left(\Phi^{-1}\right)^*\beta.$$

Il en résulte que α *est exacte sur* U *si et seulement si* $\Phi^*\alpha$ *est exacte sur* $V\cap\Phi^{-1}(U)$.

Démonstration
La démonstration consiste à appliquer la définition de la transposée.

1. $\varphi^*(f\alpha)_x = (f\alpha)_{\varphi(x)}\circ d\varphi_x = f(\varphi(x))\ \alpha_{\varphi(x)} d\varphi_x$.
2. $\varphi^*(df)_x(h) = df_{\varphi(x)}\circ d\varphi_x(h) = d(f\circ\varphi)_x(h)$.

3.

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)^* \alpha_x &= \alpha_{(\psi\circ\varphi)(x)} \circ d\left(\psi \circ \varphi\right)_x \\
&= \alpha_{(\psi\circ\varphi)(x)} \circ d\psi_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x \\
&= \left(\psi^* \alpha\right)_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x \\
&= \varphi^* \left(\psi^* \alpha\right)_x .
\end{aligned}$$

4. Le reste s'en déduit aussitôt. ■

On remarquera que la formule (2) peut s'obtenir avec l'expression en coordonnées :

$$\begin{aligned}
\left(\Phi^* df\right)_q &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) \, \frac{\partial x^j}{\partial q^i}(q) \right) dq^i \\
&= d_q \left(f \circ \Phi\right).
\end{aligned}$$