P.Aimé. 28/07/07
Calcul différentiel/Différentielles/Théorème des accroissements finis, demo14.pdf

Enoncé du théorème

f est une application définie sur un ouvert U de R^n, à valeurs dans R^p, a et b sont deux points de U tels que le segment $[a,b]$ soit inclus dans U.

On suppose que f est continue dans U, que f est différentiable en tout point $x \in]a,b[$, et qu'il existe une constante $K \geq 0$ telle que $N(d_x f) \leq K$, pour tout point $x \in]a,b[$, N étant la norme d'opérateur dans $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ subordonnée à un choix quelconque de normes dans R^n et R^p.

Alors, $\|f(b) - f(a)\| \leq K\|b-a\|$.

Démonstration

Etape 1 Commençons par nous ramener au cas d'une variable réelle en composant avec une paramétrisation φ du segment $[a,b]$: $\varphi(t) = f(a+t(b-a))$, $t \in [0,1]$. Par hypotèse, la fonction φ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, et $\varphi'(t) = d_{x(t)}f(b-a)$, en notant $x(t) = a + t(b-a)$.

Par hypothèse,
$$\forall t \in]0,1[\,,\ \|\varphi'(t)\| \leq K\|b-a\|\,,$$
et il s'agit de prouver que
$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq K\|b-a\|\,.$$

Etape 2 Introduisons une propriété technique dont l'utilité va apparaitre. On va démontrer que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall t \in [0,1]\,,\ \|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq K\|b-a\|\,t + t\varepsilon + \varepsilon.$$

La conclusion s'en suivra évidemment.

Pour cela, posons
$$X = \{t \in [0,1]\,, \|\varphi(t) - \varphi(0)\| > K\|b-a\|\,t + t\varepsilon + \varepsilon\ \}\,.$$

Il est clair que X est borné et ouvert, comme préimage de $]0,+\infty[$ par une fonction continue.

Supposons que X n'est pas vide. X possède une borne inférieure $c \in [0,1]$.

Il est clair que $c < 1$, sinon $X = \{1\}$ ne serait pas ouvert. De plus, $c > 0$, car la relation
$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq K\|b-a\|\,t + t\varepsilon + \varepsilon$$
est vraie pour $t = 0$, et donc dans un voisinage de 0, par continuité.

Enfin, $c \notin X$ car un ouvert borné de $\mathbb{R}$ ne peut contenir sa borne inférieure.

Etape 3 Il s'agit de trouver une contradiction issue de l'hypothèse $X \neq \emptyset$.

Compte tenu de ce qui précède, la relation $\|\varphi'(c)\| \leq K\|b-a\|$ est vérifiée, autrement dit,
$$\lim_{t \to c} \left\| \frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t-c} \right\| \leq K\|b-a\|\,.$$

Il en résulte que, pour un réel $\alpha > 0$ convenable, pour $t \in]c, c+\alpha[$, on peut écrire

$$\|\varphi(t) - \varphi(c)\| \leq K\|b-a\|\, t - K\|b-a\|\, c.$$

Mais il existe un point $t \in X$ tel que $t \in]c, c+\alpha[$ (sinon, c ne serait pas la borne inférieure de X). Pour un tel point, on a donc

$$K\|b-a\|\, t + t\varepsilon + \varepsilon \ < \|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq \|\varphi(t) - \varphi(c)\| + \|\varphi(c) - \varphi(0)\|.$$

Sachant que $c \notin X$, on a

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq K\|b-a\|\, t - K\|b-a\|\, c + K\|b-a\|\, c + c\varepsilon + \varepsilon.$$

L'encadrement obtenu de $\|\varphi(t) - \varphi(0)\|$ est bien contradictoire, ce qui prouve que $X = \varnothing$. ■